“MODULAZIONE DI FREQUENZA (FM)”

PREMESSA

- La modulazione AM è molto sensibile al rumore. Infatti l’informazione da trasmettere risiede nella variazione dell’ampiezza del segnale modulato. Il rumore che cade nella banda del segnale modulato si somma ad esso, degradando cosi il contenuto informativo.

- Inventata da Armstrong nel 1935, ma regolamentata solo nel 1961 in Europa all'interno delle radiodiffusioni stereofoniche, costituisce un considerevole miglioramento rispetto alla AM sia per immunità ai disturbi, sia per numero di canali effettivamente disponibili, che per l'alta fedeltà delle trasmissioni.

- È usata anche per la parte audio del segnale televisivo, trasmesso via etere, per la televisione satellitare analogica, per i cellulari di tipo ETACS, oltre che per alcune trasmissioni dei radioamatori

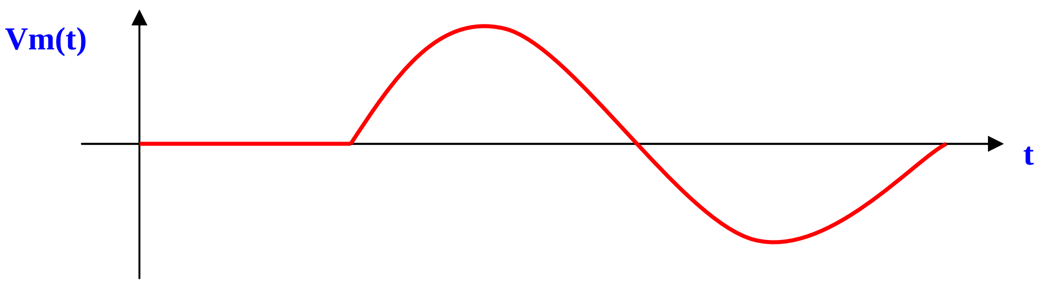
- Per le trasmissioni stereofoniche sono riservate in Italia le frequenza da 88 a 108 MHz all'interno delle VHF.

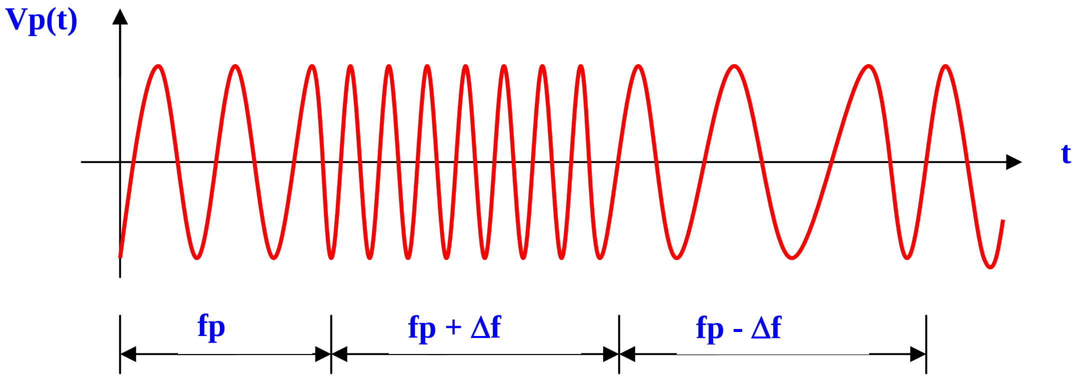
- In stereofonia la maggior parte dei disturbi, interferenze rumori, ecc. hanno spettro che si estende fino a circa 50 MHz e non oltre.

La MODULAZIONE DI FREQUENZA consiste nel far variare la pulsazione della portante, e quindi la sua frequenza, proporzionalmente al valore istantaneo del segnale modulante, lasciandone inalterata l’ampiezza V_P.

$v_m(t) = V_M sen\omega_m t$ (Sinusoidale per semplicità di analisi)

$v_p(t) = V_P sen\omega_p t$ (Per convenienza matematica la portante è di tipo seno)





Detta ω_p la pulsazione in assenza di modulazione, la pulsazione istantanea $\omega(t)$ dopo la modulazione risulta:

$$\omega(t) = \omega_p + K_f v_m(t)$$

alla quale corrisponde la frequenza istantanea:

$$f(t) = f_p + \frac{K_f v_m(t)}{2\pi} = f_p + \Delta f$$

dove K_f è una costante di proporzionalità caratteristica del modulatore.

La modulazione FM è caratterizzata da:

- Deviazione di frequenza Δf
- Indice di modulazione m_f
- Modulazione percentuale m%
- Occupazione di banda del segnale modulato
- Potenza del modulato
- Espressione matematica del modulato
- Spettro del modulato

Deviazione di frequenza e indice di modulazione

Come si può notare dai grafici temporali sopra riportati, la $v_p(t)$ aumenta la sua frequenza all'aumentare della $v_m(t)$ e viceversa raggiungendo così due valori massimi: $f_{MAX} = f_p + \Delta f$ e $f_{\min} = f_p - \Delta f$ dove Δf rappresenta la **deviazione istantanea di frequenza**.

La variazione di frequenza è pari a: $\Delta f = \dfrac{K_f V_M}{2\pi}$.

Il parametro $m_f = \dfrac{K_f V_M}{\omega_m} = \dfrac{K_f V_M}{2\pi f_m} = \dfrac{\Delta f}{f_m}$ prende il nome di **indice di modulazione di frequenza** e dipende sia dall'ampiezza sia dalla frequenza del segnale modulante.

<u>Al contrario della modulazione AM, l'indice di modulazione di una modulazione FM può essere maggiore di 1.</u>

Modulazione percentuale

$$m_{\%} = \frac{\Delta f}{\Delta f_{MAX}} \cdot 100$$

Nelle modulazioni FM è necessario limitare il valore di Δf in quanto, è pur vero che aumentandolo aumentano le prestazioni del mio sistema ma aumenta pure la banda, che comunque deve rientrare nel canale assegnato.
Quindi viene fissato un Δf_{MAX} per evitare interferenze con altri canali.

Occupazione di Banda del segnale modulato

Nella pratica, si utilizza la formula di Carson:

$B = 2(\Delta f + f_{MAX})$

Dove f_{MAX} è la massima frequenza contenuta nel segnale modulante.

Facciamo un esempio…..

- Radio FM commerciale : 88MHz a 108MHz
- Segnale modulante: segnale audio con frequenze comprese tra 30Hz a 15 kHz.
- Le normative impongono una deviazione di frequenza pari a 75KHz.
- L'occupazione in banda è:

  $B = 2(75000 + 15000) = 180 \text{ kHz}$

- Per non avere interferenze sceglieremo una banda maggiore di 180kHz ovvero 200kHz.

Potenza del segnale modulato

Nella Modulazione FM l'ampiezza del segnale modulato non varia e rimane sempre uguale a quello della portante V_P.

$$P_{TOT} = P_P = \frac{V_P^{\ 2}}{2R}$$

Aumentando l'ampiezza della modulante, aumenta la deviazione di frequenza ma la potenza totale trasmessa non cambia.
Si allarga però la banda del modulato in quanto aumenta la deviazione di frequenza.

Espressione matematica del segnale modulato

$$v_{FM}(t) = V_P sen(\omega_p t + m_f sen\omega_m t)$$

Applicando da relazione trigonometrica:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta$$

Otteniamo:

$$v_{FM}(t) = V_P sen\omega_p t \cdot \cos(m_f sen\omega_m t) + V_P \cos\omega_p t \cdot sen(m_f sen\omega_m t)$$

Le funzioni cerchiate sono dette **funzioni di Bessel di prima specie** indicate come $J_n(m_f)$, dove l'indice *n* rappresenta l'ordine

Spettro del segnale modulato in FM

Lo spettro di un segnale modulato FM è composto da infinite righe distanziate tra di loro di f_m.
Le funzioni di Bessel sono dei coefficienti che determinano l'ampiezza delle componenti spettrali. La componente n-esima ha come ampiezza $V_p \cdot J_n(m_f)$.
Vi è una simmetria rispetto alla frequenza portante per cui la componente a frequenza $f_p + n \cdot f_m$ ha la stessa ampiezza della componente a frequenza $f_p - n \cdot f_m$

Per lo studio dello spettro, cioè dell'insieme di tutte le sinusoidi che rappresentano nel dominio della frequenza il segnale modulato, è più semplice fare un esempio.

Esercizio:

Tracciare lo spettro di un segnale in modulazione di frequenza (FM) con:

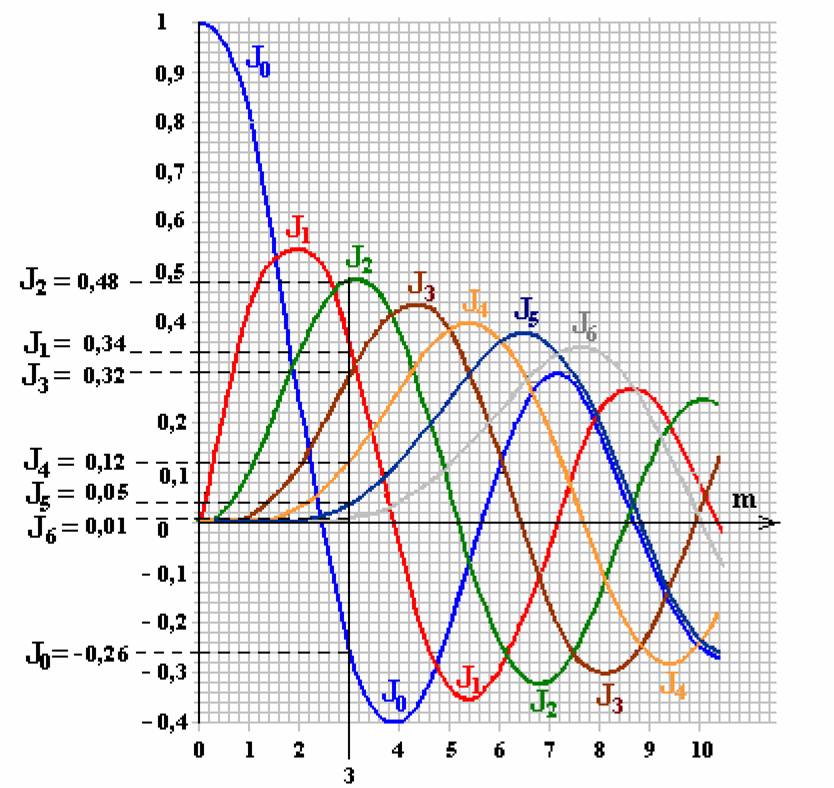
- $f_p = 100$ MHz
- $f_m = 15$ KHz
- $\Delta f = 45$ KHz
- $V_P = 100$ V

Si determina il valore di m_f in base alla formula:

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{45.000}{15.000} = 3$$

<u>Il numero significativo delle coppie di righe spettrali (*k*) soddisfa la condizione:</u> $\underline{k = m_f + 1}$

Si traccia, sul diagramma delle funzioni di Bessel, un segmento parallelo all'asse delle ordinate in corrispondenza del valore m = 3 dell'indice di modulazione e, dall'intersezione con tutte le curve J_0, J_1, J_2, ..., si determinano i valori che queste funzioni J_0, J_1, J_2, ..., assumono come è schematicamente indicato nella figura sotto.



Risulta dal grafico:

$J_0 = -0,26$

$J_1 = 0,34$

$J_2 = 0,48$

$J_3 = 0,32$

$J_4 = 0,12$

$J_5 = 0,05$

$J_6 = 0,01$

E quindi le ampiezze delle righe spettrali, in Volt sono:

$$J_0 V_P = |-0{,}26| \cdot 100 = 26 \text{ V}$$

$$J_1 V_P = 0{,}34 \cdot 100 = 34 \text{ V}$$

$$J_2 V_P = 0{,}48 \cdot 100 = 48 \text{ V}$$

$$J_3 V_P = 0{,}32 \cdot 100 = 32 \text{ V}$$

$$J_4 V_P = 0{,}12 \cdot 100 = 12 \text{ V}$$

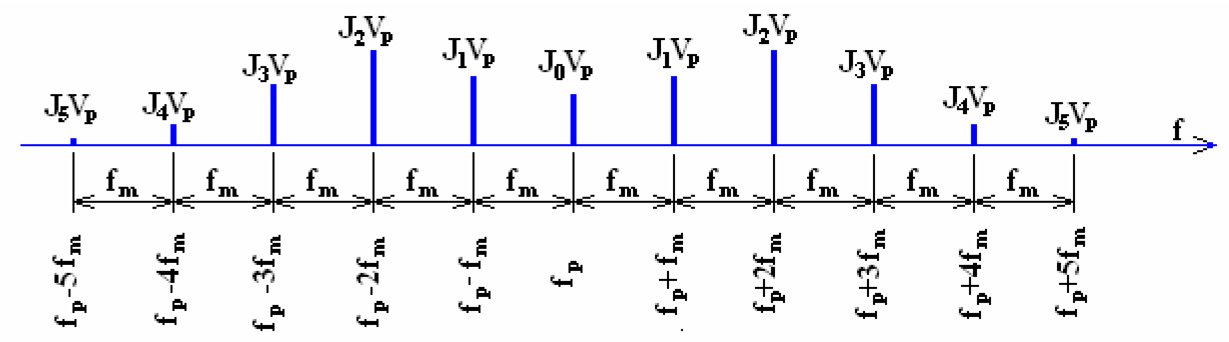
$$J_5 V_P = 0{,}05 \cdot 100 = 5 \text{ V}$$

Si definisce **banda** di un segnale modulato in FM, l'insieme delle frequenze di valore significativo che lo costituiscono e cioè, nel caso in esame, di ampiezza superiore all'**1%** della portante non modulata.

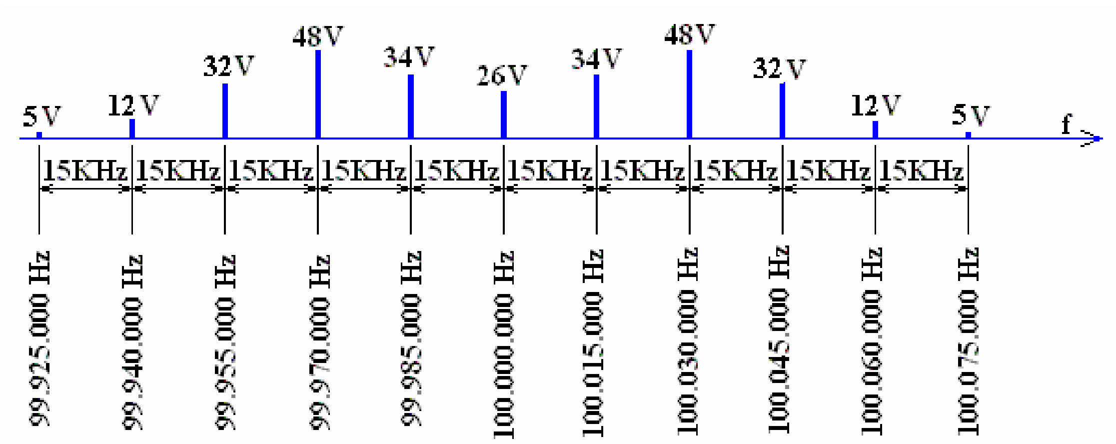
Nel caso in esame, osservando che nelle funzioni di **Bessel** il valore di riferimento della portante non modulata, cioè J_0 con m=0 è uguale a 1, si stabilisce di considerare come facenti parte integrante della banda del segnale modulato in **FM** soltanto quelle funzioni di **Bessel** il cui valore in corrispondenza al valore di m prescelto, sia superiore, in modulo, a 0,01.

Ecco perché nel nostro esempio abbiamo escluso J_6, sesta funzione di **Bessel** e le successive.

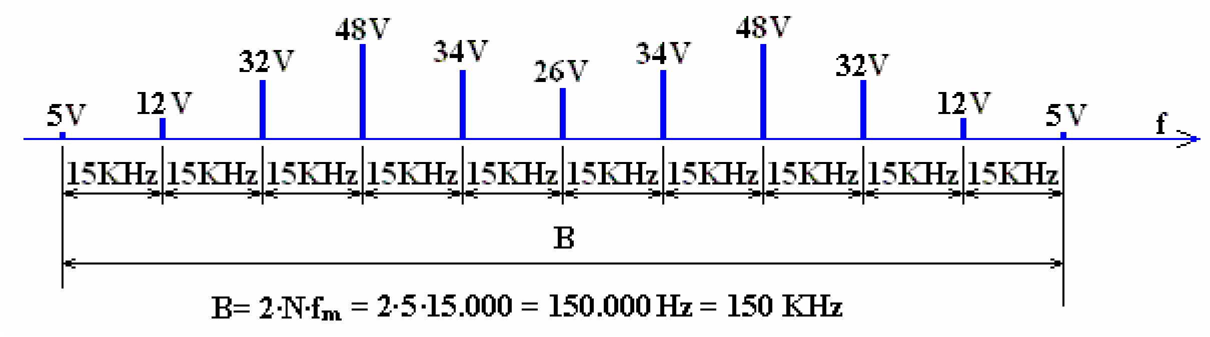
Ottenuti i valori delle funzioni di **Bessel**, si traccia la banda del segnale modulato in **FM**:



Lo stesso, con i valori numerici risulta:



Nel nostro esempio la larghezza di banda è la seguente:



La formula per determinare la larghezza di banda in **FM** è dunque:

$$B = 2 \cdot N \cdot f_m$$

Per determinare però la larghezza di banda occorre conoscere i diagrammi delle funzioni di **Bessel**, come abbiamo fatto noi, oppure il numero delle righe spettrali, cosa che è possibile solo disponendo di un buon analizzatore di spettro.

Si può calcolare la larghezza di banda, sia pure in modo approssimativo, senza disporre né dell'analizzatore di spettro, né delle funzioni di **Bessel**, usando una formula empirica, dovuta a Carson:

$$B = 2\left(\Delta f + f_{m_{MAX}}\right)$$

dove Δf è il massimo scarto in frequenza rispetto alla portante a riposo, e $f_{m_{MAX}}$ è la massima frequenza modulante.

Questa formula è tanto più esatta, quanto più m_f è grande, mentre per m_f piccolo non è molto precisa. Nel caso dell'esempio precedente avrebbe dato:

$$B = 2(45.000 + 15.000) = 120.000 \text{ Hz}$$

Se $m_f << 1$ solo poche righe sono significative e in tal caso si ha la cosiddetta ***“banda stretta”*** pari a $B = 2 f_m$, mentre se $m_f >> 1$ il numero di righe significative cresce sensibilmente e il segnale e si ha la cosiddetta ***“banda larga”*** pari a $B = 2\Delta f$